

カラード・ノイズにより振幅変調された信号の予測

天 野 正 章

The Prediction of Amplitude Modulated Signals by Colored Noises

MASAAKI AMANO

The problem of the rejection of the A, M coupling colored noises to the signal is discussed here in Wiener's sense. In this paper, it is assumed in advance that the signal and the noise are the stationary and ergodic random processes, and are statistically independent of each other.

On this assumption the optimum predictor is defined here with regard to the least mean-square-error of the actual output from the desired output.

The procedure to synthesize the generalized optimum linear time-invariant filter with infinite Memory for A, M coupling noises is reduced to the problem of the solution of the Wiener-Hopf integral equation.

As an illustrative example, here is shown a typical solution of Wiener-Hopf integral equation in the case that the signal and the noise have the same damped exponential type Auto-correlation function.

1. ま え が き

信号に重畳された雑音の予測フィルタの問題は周知のごとく Wiener によって研究され、無限メモリーを持つ最適フィルタを求める問題を Wiener-Hopf 積分方程式を解くことに帰着せしめ、更にスペクトル因子分解法による解をあたえた。Zadeh と Ragazzini は更に有限メモリーの場合を、又それとは独立に Bode と Shannon の研究があげられる。又 Booton は非定常の場合の Wiener-Hopf 積分方程式を論じている。いずれにしてもそれらの研究系列は入力として信号 $S(t)$ と雑音 $N(t)$ との和 $S(t)+N(t)$ を基本入力としたものである。通信系に於て雑音の混入する形式は $S(t)+N(t)$ のみで完結するという保証は認められぬであろう。特に興味のあるのは S, N が

$$S(t)+S(t)N(t)=S(t)(1+N(t)) \dots\dots\dots (1)$$

なる振幅変調形入力を構成している場合である。以下、本論文では、この入力が受信される最適フィルタシステムについて考察する。

(1) 式はより一般に $f(S, N)$ なる零メモリー非線形結合変換器を通してえられるもので、

本論文では特に

$$f(S, N) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} S^{\alpha} N^{\beta} \dots \dots \dots (2)$$

なる多項式関数に属するものと仮定している。

(2) 式の形の受信信号を伝達関数 $H(S)$ なるフィルターを通すことによって、できる限り出力信号が $S(t+T)$ ($T>0$: 予測) に近いものを取りだす為の最適フィルタ $H(S)$ を Wiener フィルタの立場で求めようとするものである。

しばしば近似的に $S(t)$, $N(t)$ は定常的且つエルゴード性を持ち、それらは互いに統計的に独立であると考えられる。その意味で本論文では上記の仮定のもとで議論をすすめることにする。

2. 非線形的に結合された雑音に対する最適フィルタ

非線形入力 $f[S, N]$ が不変定数系のインパルス応答関数 $h(\tau)$ なる物理的に実現可能な無限メモリーをもつフィルタを通過して生ずる実際の出力 $0(t)$ は

$$0(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) f[S(\tau), N(\tau)] d\tau \dots \dots \dots (3)$$

でえられる。ここで $t-\tau=\tau'$ なる変数変換をほどこすと

$$0(t+\tau') = - \int_{\infty}^0 h(\tau') f[S(t-\tau'), N(t-\tau')] d\tau' \dots \dots \dots (4)$$

となる。更に、あらためて $\tau'=\sigma$, $\tau+\tau'=t$ と書きあらためると

$$0(t) = \int_0^{\infty} h(\sigma) f[S(t-\sigma), N(t-\sigma)] d\sigma \dots \dots \dots (5)$$

となる。ただし

$$h(\sigma) = \begin{cases} h(\sigma) : \sigma \geq 0 \\ 0 : \sigma < 0 \end{cases} \dots \dots \dots (6)$$

実際の出力 $0(t)$ は、希望出力 $S(t+T)$ とは必ずしも一致しないので、

$$\epsilon(t) = S(t+T) - 0(t) \dots \dots \dots (7)$$

なる誤差 $\epsilon(t)$ を導入し、

$$\overline{\epsilon(t)^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \epsilon(t)^2 dt \dots \dots \dots (8)$$

なる自乗平均誤差を最小にするような $h(\sigma)$ (最適予測フィルタと呼ぶことにする。) を求めようとするものである。(5)~(8) 式によって

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon(t)^2} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\sigma_1) h(\sigma_2) \overline{f[S(t-\sigma_1), N(t-\sigma_1)] f[S(t-\sigma_2), N(t-\sigma_2)]} d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &\quad - 2 \int_0^{\infty} h(\sigma) \overline{S(t+T) f[S(t-\sigma), N(t-\sigma)]} d\sigma + \overline{S(t+T)^2} \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

をうる。入力 f の自己相関関数を

$$\varphi(\sigma_1 - \sigma_2) = \overline{f[S(t-\sigma_1), N(t-\sigma_1)] f[S(t-\sigma_2), N(t-\sigma_2)]} \dots \dots \dots (10)$$

希望出力 $S(t+T)$ と入力 f との相互相関関数を

$$\Psi(\sigma+T)=\overline{S(t+T)f[S(t-\sigma), N(t-\sigma)]} \dots\dots\dots(11)$$

$S(t+T)$ の自己相関関数を $\varphi_{ss}(\tau)$ と記すと

$$\varphi_{ss}(0)=\overline{S(t+T)^2}$$

なることに注意すると (9) 式はかんたんに

$$\overline{\varepsilon(t)^2}=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\sigma_1)h(\sigma_2)\varphi(\sigma_1-\sigma_2)d\sigma_1d\sigma_2-2\int_0^\infty h(\sigma)\Psi(\sigma+T)d\sigma+\varphi_{ss}(0) \dots\dots\dots(12)$$

となる。いま (12) 式を最小にするインパルス応答関数が $h(\sigma)$ であったと仮定して、任意のインパルス応答関数 $g(\sigma)$ とスカラー η によって、 $h(\sigma)$ に対して

$$h(\sigma)+\eta g(\sigma)$$

なる変分をとる。そのときの $\overline{\varepsilon(t)^2}$ を $\overline{\varepsilon(t)_\eta^2}$ と記すと (12) 式は

$$\overline{\varepsilon(t)_\eta^2}=L\eta^2+M\eta+\overline{\varepsilon(t)^2} \dots\dots\dots(13)$$

となる。ただし $g(\sigma)$ は

$$g(\sigma)=g(\sigma) ; \sigma \geq 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$; \sigma < 0$$

を満足するものとする。さらに

$$L=\int_0^\infty\int_0^\infty g(\sigma_1)g(\sigma_2)\varphi(\sigma_1-\sigma_2)d\sigma_1d\sigma_2=\left\{\int_0^\infty g(\sigma)f[S(t-\sigma), N(t-\sigma)]d\sigma\right\}^2>0 \dots\dots\dots(15)$$

$$M=2\int_0^\infty g(\sigma_2)\left\{\int_0^\infty h(\sigma_1)\varphi(\sigma_1-\sigma_2)d\sigma_1-\Psi(\sigma_2+T)\right\}d\sigma_2, \sigma_2 \geq 0 \dots\dots\dots(16)$$

となる。よって $\overline{\varepsilon(t)_\eta^2}$ を最小ならしめる為の必要十分条件は

$$\left[\frac{d\overline{\varepsilon(t)_\eta^2}}{d\eta}\right]_{\eta=0}=M=0 \dots\dots\dots(17)$$

となる。(16式) から、結局

$$\int_0^\infty h(\sigma_1)\varphi(\sigma_1-\sigma_2)d\sigma_1=\Psi(\sigma_2+T), \sigma_2 \geq 0 \dots\dots\dots(18)$$

をうる。最適インパルス応答関数 $h(\sigma)$ を求める問題は (18) 式のウィーナー・ホッフ積分方程式を解くことに帰着される。最適伝達関数 $H(S)$ は

$$H(S)=\int_{-\infty}^\infty h(\sigma)e^{-S\sigma}d\sigma, S=j\omega \dots\dots\dots(19)$$

であたえられる。

したがって入力 f の自己相関関数は (2) 式と (10) 式とから

$$\varphi(\sigma_1-\sigma_2)=\sum_\alpha\sum_\beta\sum_{\alpha'}\sum_{\beta'} A_{\alpha\beta}A_{\alpha'\beta'}\times\overline{S(t-\sigma_1)^\alpha N(t-\sigma_1)^\beta S(t-\sigma_2)^{\alpha'} N(t-\sigma_2)^{\beta'}} \dots\dots\dots(20)$$

となる。 S, N が独立の場合には

$$\varphi(\sigma_1-\sigma_2)=\sum_\alpha\sum_\beta\sum_{\alpha'}\sum_{\beta'} A_{\alpha\beta}A_{\alpha'\beta'}\times\overline{S(t-\sigma_1)^\alpha (t-\sigma_2)^{\alpha'}}\times\overline{N(t-\sigma_1)^\beta N(t-\sigma_2)^{\beta'}} \dots\dots\dots(21)$$

となる。同様に希望出力と入力との相互相関関数は (11) 式によって

$$\Psi(\sigma+T)=\sum_\alpha\sum_\beta A_{\alpha\beta}\overline{S(t+T)S(t-\sigma)^\alpha N(t-\sigma)^\beta} \dots\dots\dots(22)$$

となる。 S, N が独立の場合には

$$\Psi(\sigma+T)=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}A_{\alpha\beta}\overline{S(t+T)}S(t-\sigma)^{\alpha}\times\overline{N(t-\sigma)^{\beta}}\cdots\cdots(23)$$

(18) 式の関係を (12) 式の第 1 項に代入すると最小自乗平均誤差は

$$\varepsilon(t)^2=\varphi_{SS}(0)-\int_0^{\infty}h(\sigma)\Psi(\sigma+T)d\sigma\cdots\cdots(24)$$

となる。

3. スペクトル因子分解法による最適解

いま,

$$y(\sigma_2)=\Psi(\sigma_2+T)-\int_0^{\infty}h(\sigma_1)\varphi(\sigma_1-\sigma_2)d\sigma_1\sigma_2\geq 0\cdots\cdots(25)$$

なる関数 $y(\sigma)$ を導入する。 $y(\sigma)$ は

$$y(\sigma_2)=\begin{cases} 0 & : \sigma_2 \geq 0 \\ y(\sigma_2) & : \sigma_2 < 0 \end{cases} \cdots\cdots(26)$$

なる性質をもつ。(25) 式の両辺に σ_2 に関してフーリエ変換をほどこすと

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}y(\sigma_2)e^{-S\sigma_2}d\sigma_2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\sigma_2+T)e^{-S\sigma_2}d\sigma_2 \\ &- \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}h(\sigma_1)\varphi(\sigma_1-\sigma_2)d\sigma_1\right]e^{-S\sigma_2}d\sigma_2 \cdots\cdots(27) \end{aligned}$$

ただし $S=j\omega$

したがって、(27) 式は

$$Y(S)=\bar{\Psi}(S)-H(S)\Phi(S) \cdots\cdots(28)$$

となる。ただし

$$Y(S)=\int_{-\infty}^{\infty}y(\sigma)e^{-S\sigma}d\sigma \cdots\cdots(29)$$

$$\bar{\Psi}(S)=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\sigma_2+T)e^{-S\sigma}d\sigma \cdots\cdots(30)$$

$$H(S)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\sigma)e^{-S\sigma}d\sigma \cdots\cdots(31)$$

$$\Phi(S)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)e^{-S\sigma}d\sigma \cdots\cdots(32)$$

とする。

(29)～(32) 式の関数は S 平面上でそれぞれ次の性質をもつ。

$$\begin{cases} Y(S)=\text{右半平面にのみ極と零点をもつ。}(\because \sigma \leq 0 \text{ で } y(\sigma)=0) \\ \bar{\Psi}(S)=\text{全平面で極と零点をもつ。} \\ H(S)=\text{左半平面にのみ極と零点をもつ。}(\because \sigma < 0 \text{ で } h(\sigma)=0) \\ \Phi(S)=\text{全平面で極と零点をもつ。} \end{cases} \cdots\cdots(33)$$

ここで $\Phi(S)$ を次のように因子分解する。

$$\Phi(S)=\Phi^+(S)\Phi^-(S) \cdots\cdots(34)$$

$$\begin{cases} \Phi^+(S) = \text{左半平面にのみ極と零点をもつ。} \\ \Phi^-(S) = \text{右半平面にのみ極と零点をもつ。} \end{cases} \quad (35)$$

ここで (34) 式を (28) 式に代入してさらに両辺を $\Phi^-(S)$ でわると

$$\frac{Y(S)}{\Phi^-(S)} = \frac{\bar{\Psi}(S)}{\Phi^-(S)} - H(S)\Phi^+(S) \quad (36)$$

となる。(36) 式の左辺は右半平面にのみ極と零点をもち、右辺第 2 項は左半平面にのみ極と零点をもつ。

さらに

$$\gamma(\sigma) = \gamma^+(\sigma) + \gamma^-(\sigma) \quad (37)$$

なる $\gamma(\sigma)$ を導入して $\gamma^+(\sigma)$, $\gamma^-(\sigma)$ に分離する。ただし、

$$\begin{cases} \gamma^+(\sigma) = 0 : \sigma < 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} \gamma^-(\sigma) = 0 : \sigma > 0 \end{cases} \quad (39)$$

また、 $\gamma(\sigma)$, $\gamma^+(\sigma)$, $\gamma^-(\sigma)$ のフーリエ変換をそれぞれ $\Gamma(S)$, $\Gamma^+(S)$, $\Gamma^-(S)$ とすれば S 平面で次の性質をもつ。

$$\begin{cases} \Gamma(S) = \text{全平面で極と零点をもつ} \\ \Gamma^+(S) = \text{左半平面にのみ極と零点をもつ} \\ \Gamma^-(S) = \text{右半平面にのみ極と零点をもつ} \end{cases} \quad (40)$$

$\Gamma(S)$ を (36) 式の右辺第 1 項に適用して

$$\Gamma(S) = \frac{\bar{\Psi}(S)}{\Phi^-(S)} = \Gamma^+(S) + \Gamma^-(S) \quad (41)$$

とおく。(41) 式を (36) 式に代入すると

$$\frac{Y(S)}{\Phi^-(S)} = \Gamma^+(S) + \Gamma^-(S) - H(S)\Phi^+(S) \quad (42)$$

となるが、ここで式を若干変形すると

$$Y(S) = [\Gamma^+(S) - H(S)\Phi^+(S)]\Phi^-(S) + \Gamma^-(S)\Phi^-(S) \quad (43)$$

となる。上式の、左辺は右半平面にのみ極と零点をもち、右辺は $\Phi^-(S)$ および $\Gamma^-(S)\Phi^-(S)$ は右半平面にのみ極と零点をもつ。したがって、上式の右辺が常に $Y(S)$ の性質と一致する為には、右辺第 1 項のカッコ内が一定になれば良いから、

$$\Gamma^+(S) - H(S)\Phi^+(S) = C \quad (\text{一定}) \quad (44)$$

故に、上式から

$$H(S) = \frac{C}{\Phi^+(S)} + \frac{\Gamma^+(S)}{\Phi^+(S)}$$

をうる。しかるに $H(S)$ は集中定数系なることを仮定しているから、 S の無限遠点における収束性から $C=0$ でなければならぬことが知られている、結局、最適伝達関数は

$$H(S) = \frac{\Gamma^+(S)}{\Phi^+(S)} = \frac{1}{\Phi^+(S)} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^+(\sigma) e^{-S\sigma} d\sigma \quad (45)$$

となる。よって最適インパルス応答 $h(\sigma)$ はフーリエ逆変換により

$$h(\sigma) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} H(S) e^{S\sigma} dS = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma^+(S)}{\Phi^+(S)} e^{S\sigma} dS \quad \dots\dots\dots (46)$$

となる。(46) 式を (24) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon(t)}_{\min}^2 &= \varphi_{SS}(0) - \int_0^{\infty} \Psi(\sigma + T) d\sigma \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma^+(S)}{\Phi^+(S)} e^{S\sigma} dS \right] \\ &= \varphi_{SS}(0) - \int_0^{\infty} \gamma^+(\sigma) d\sigma \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Phi^+(S)} \left[\int_j^{\infty} \Psi(\sigma + T) e^{-S\sigma} d\sigma \right] e^{S\sigma} dS \\ &= \varphi_{SS}(0) - \int_0^{\infty} \gamma^+(\sigma) d\sigma \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(S)}{\Phi^+(S)} e^{S\sigma} d\sigma \quad \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma^+(\sigma)$ の共役 $\gamma^+(\sigma)^*$ が

$$\gamma^+(\sigma)^* = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\Psi}(S)}{\Phi^+(S)} e^{S\sigma} d\sigma \quad \dots\dots\dots (48)$$

なることに注意して

$$\overline{\varepsilon(t)}_{\min}^2 = \varphi_{SS}(0) - \int_0^{\infty} \gamma^+(\sigma)^2 d\sigma = \varphi_{SS}(0) - \int_0^{\infty} \gamma(\sigma)^2 d\sigma \quad \dots\dots\dots (49)$$

をうる。

4. カラー・ノイズにより振幅変調された信号の予測

通常、信号と雑音は独立と考えられるから、以下互いに独立な確率過程に属するものと仮定する。

さて、入力形は $f[S, N] = S(1+N)$ の場合である。よって、入力の自己相関関数は

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_1 - \sigma_2) &= \sum_{\alpha=1}^1 \sum_{\beta=0}^1 \sum_{\alpha'=1}^1 \sum_{\beta'=0}^1 A_{\alpha\beta} A_{\alpha'\beta'} \times \overline{S(t-\sigma_1)^\alpha S(t-\sigma_2)^{\alpha'}} \times \overline{N(t-\sigma_1)^\beta N(t-\sigma_2)^{\beta'}} \\ &= (A_{10}^2 + 2 A_{10} A_{11} \bar{N}) \overline{S(t-\sigma_1) S(t-\sigma_2)} + A_{11}^2 \overline{S(t-\sigma_1) S(t-\sigma_2) N(t-\sigma_1) N(t-\sigma_2)} \\ &= (A_{10}^2 + 2 A_{10} A_{11} \bar{N}) \varphi_{SS}(\sigma_1 - \sigma_2) + A_{11}^2 \varphi_{SS}(\sigma_1 - \sigma_2) \varphi_{NN}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{cases} \varphi_{SS}(\sigma_1 - \sigma_2) = \overline{S(t-\sigma_1) S(t-\sigma_2)} \\ \varphi_{NN}(\sigma_1 - \sigma_2) = \overline{N(t-\sigma_1) N(t-\sigma_2)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (51)$$

また入力と希望出力との相互相関関数は同様に (23) 式より

$$\Psi(\sigma + T) = \sum_{\alpha=1}^1 \sum_{\beta=0}^1 A_{\alpha\beta} \overline{S(t+T) S(t-\sigma)^\alpha \cdot N(t-\sigma)^\beta} = (A_{10} + A_{11} \bar{N}) \varphi_{SS}(\sigma + T) \quad \dots\dots (52)$$

したがって (18) 式の必要十分条件式 (ウィーナーホッフ積分方程式) は

$$\begin{aligned} (A_{10} + A_{11} \bar{N}) \varphi_{SS}(\sigma_2 + T) &= \int_0^{\infty} h(\sigma_1) \{ (A_{10}^2 + 2 A_{10} A_{11} \bar{N}) \varphi_{SS}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ &\quad + A_{11}^2 \varphi_{SS}(\sigma_1 - \sigma_2) \varphi_{NN}(\sigma_1 - \sigma_2) \} d\sigma_1 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

となる。

いま、信号、雑音の自己相関関数を

$$\varphi_{SS}(\sigma) = \sum_{i=1}^p S_i e^{-a_i |\sigma|} \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$\varphi_{NN}(\sigma) = \sum_{j=1}^q N_j e^{-b_j|\sigma|} \dots\dots\dots (55)$$

と仮定する。\$S_i\$, \$N_j\$, \$a_i\$, \$b_j\$ は複素数。

また \$a_i\$, \$b_j\$ は正の実数部をもつとする。

よって (50) 式は、これらを代入すると

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= (A_{10}^2 + 2A_{10}A_{11}\bar{N}) \sum_{i=1}^p S_i e^{-a_i|\sigma|} + A_{11}^2 \sum_{i=1}^p S_i e^{-a_i|\sigma|} \sum_{j=1}^q N_j e^{-b_j|\sigma|} \\ &= \sum_{i=1}^p S_i e^{-a_i|\sigma|} \left\{ (A_{10}^2 + 2A_{10}A_{11}\bar{N}) + A_{11}^2 \sum_{j=1}^q N_j e^{-b_j|\sigma|} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^p S_i e^{-a_i|\sigma|} \sum_{j=0}^q N_j' e^{-b_j|\sigma|} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^q S_i N_j' e^{-(a_i+b_j)|\sigma|} \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

となる。ただし

$$\begin{cases} N_j' = A_{11}^2 N_j \quad (j=1, 2, 3, \dots, q) \\ N_0' = A_{10}^2 + 2A_{10}A_{11}\bar{N} \quad (j=0) \\ b_0 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (57)$$

よって入力電力スペクトル密度は

$$\Phi(S) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^q \frac{2S_i N_j' (a_i + b_j)}{-S^2 + (a_i + b_j)^2} = \frac{\theta_0^2 \prod_{k=1}^{p'} (-S^2 + \gamma_k^2)}{\prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^q (-S^2 + \beta_{ij}^2)} \dots\dots\dots (58)$$

の形にかくことができる。ただし

$$\beta_{ij} = a_i + b_j, \quad p' = p(q+1) - 1 \dots\dots\dots (59)$$

入力と希望出力との相互相関関数は

$$\Psi(\sigma + T) = (A_{10} + A_{11}\bar{N}) \varphi_{SS}(\sigma + T) = \sum_{i=1}^p (A_{10} + A_{11}\bar{N}) S_i e^{-a_i|\sigma + T|}$$

よってその電力スペクトル密度は

$$\bar{\Psi}(S) = \sum_{i=1}^p \frac{2(A_{10} + A_{11}\bar{N}) a_i S_i}{-S^2 + a_i^2} e^{ST} = \theta_1 \frac{\prod_{m=1}^{p-1} (-S^2 + \delta_m^2)}{\prod_{i=1}^p (-S^2 + a_i^2)} e^{ST} \dots\dots\dots (60)$$

\$\Phi(S)\$ を因子分解すると

$$\Phi^+(S) = \frac{\theta_0 \prod_{k=1}^{p'} (S + \gamma_k)}{\prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^q (S + \beta_{ij})} \dots\dots\dots (61)$$

$$\Phi^-(S) = \frac{\theta_0 \prod_{k=1}^{p'} (-S + \gamma_k)}{\prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^q (-S + \beta_{ij})} \dots\dots\dots (62)$$

$$\therefore \gamma(\sigma) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\theta_1 \prod_{m=1}^{p-1} (-S^2 + \delta_m^2) \prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^q (-S + \beta_{ij})}{\theta_0 \prod_{i=1}^p (-S^2 + a_i^2) \prod_{k=1}^{p'} (-S + \gamma_k)} e^{S(\sigma+T)} dS$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\rho_i}{S+a_i} + \sum_{k=1}^{p'} \frac{\rho_k'}{-S+\gamma_k} \right) e^{S(\sigma+T)} dS \quad \dots\dots\dots (63)$$

ただし

$$\rho_i = \frac{\theta_1}{\theta_0} \left(\frac{\prod_{m=1}^{p-1} (-S^2 + \delta_m^2)}{\prod_{i=1}^p (-S^2 + a_i^2)} \frac{\prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^q (-S + \beta_{ij})}{\prod_{k=1}^{p'} (-S + \gamma_k)} (S + a_i) \right)_{S=-a_i} \quad \dots\dots\dots (64)$$

$$\rho_k' = \frac{\theta_1}{\theta_0} \left(\frac{\prod_{m=1}^{p-1} (-S^2 + \delta_m^2)}{\prod_{i=1}^p (-S^2 + a_i^2)} \frac{\prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^q (-S + \beta_{ij})}{\prod_{k=1}^{p'} (-S + \gamma_k)} (-S + \gamma_k) \right)_{S=\gamma_k} \quad \dots\dots\dots (65)$$

さらに (63) 式の積分式で

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\rho_i}{S+a_i} e^{S(\sigma+T)} dS = \begin{cases} \rho_i e^{-a_i(\sigma+T)} : \sigma+T > 0 \\ 0 : \sigma+T < 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\rho_k'}{-S+\gamma_k} e^{S(\sigma+T)} dS = \begin{cases} 0 : \sigma+T < 0 \\ \rho_k' e^{\gamma_k(\sigma+T)} : \sigma+T > 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (67)$$

なることに注意して計算すると

$$r(\sigma) = \sum_{i=1}^p \rho_i e^{-a_i(\sigma+T)} \quad \dots\dots\dots (68)$$

となる。したがって最適予測器の伝達関数は (45), (61) 式によって

$$H(S) = \frac{\prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^q (S + \beta_{ij})}{\theta_0 \prod_{k=1}^{p'} (S + \gamma_k)} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\rho_i e^{-a_i T}}{S + a_i} \right) \quad \dots\dots\dots (69)$$

となる。

□

さらに (49) 式によって最小自乗平均誤差は

$$\overline{\epsilon(t)^2}_{\min} = \varphi_{SS}(0) - \sum_{i=1}^p \sum_{i'=1}^p \rho_i \rho_{i'} \frac{e^{-(a_i+a_{i'})T}}{a_i+a_{i'}} \quad \dots\dots\dots (70)$$

となる。

5. 例 題

かんたんの為に (54), (55) 式で $p=q=1$, $A_{10}=A_{11}=1$, $\bar{N}=0$ の場合を考える。

$$\begin{cases} \varphi_{SS}(\sigma) = S_1 e^{-a_1|\sigma|} \\ \varphi_{NN}(\sigma) = N_1 e^{-b_1|\sigma|} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (71)$$

この場合 S_1 , N_1 および a_1 , b_1 は正の実数と考えられる。

この形の自己相関関数は、たとえば矩形パルスの高さ x が、確率密度

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

なる平均値 $x=0$ のガウス分布をもち、且つ、パルス幅 l は、高さ x に独立で、

$$p(l) = \beta e^{-\beta l}$$

なる確率分布にしたがう波形の場合で、その自己相関関数は

$$\varphi_{xx}(\sigma) = \sigma_x^2 e^{-\beta|\sigma|}$$

となる。 σ_x^2 は x の分散、 l の平均 l に対して

$$l = \frac{1}{\beta}$$

なる関係をもつ。

また、たとえば、高さ $+x$ 、 $-x$ の 2 値をとりえて、 $+x$ から $-x$ の値をとるとき 0 点との交さがポアソン分布にしたがう、すなわちポアソン矩形波の場合にも同形となる。この場合には、単位時間におきる平均 0 点交さ数を k とすると、自己相関関数は、

$$\varphi_{xx}(\sigma) = x^2 e^{-2k|\sigma|}$$

となる。

さて、(58) 式によって

$$\Phi(S) = \frac{2 S_1 N_0' (a_1 + b_0)}{-S^2 + (a_1 + b_0)^2} + \frac{2 S_1 N_1' (a_1 + b_1)}{-S^2 + (a_1 + b_1)^2} = \frac{\theta_0^2 (-S^2 + \gamma_1^2)}{(-S^2 + \beta_{10}^2)(-S^2 + \beta_{11}^2)} \dots\dots\dots (72)$$

ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} p' = 1 \\ \theta_0^2 = 2 a_1 S_1 + 2(a_1 + b_1) S_1 N_1 \\ N_0' = 1 \\ \beta_{10} = a_1 + b_0 = a_1 \\ \beta_{11} = a_1 + b_1 \\ \gamma_1 = \sqrt{\frac{a_1(a_1 + b_1)(a_1 + b_1 + a_1 N_1)}{a_1 + (a_1 + b_1) N_1}} \end{array} \right. \dots\dots\dots (73)$$

また、(60) 式から

$$\bar{\Psi}(S) = \frac{2 a_1 S_1 e^{+ST}}{-S^2 + a_1} = \theta_1 \frac{e^{ST}}{-S^2 + a_1} \dots\dots\dots (74)$$

ただし

$$\theta_1 = 2 a_1 S_1 \dots\dots\dots (75)$$

よって (64) 式から

$$\rho_1 = \frac{\theta_1(a_1 + \beta_{11})}{\theta_0(a_1 + \gamma_1)} \dots\dots\dots (76)$$

したがって

$$H(S) = \frac{\rho_1}{\theta_0} \frac{S + \beta_{11}}{S + \gamma_1} e^{-a_1 T} \dots\dots\dots (77)$$

$$\overline{\varepsilon(t)^2}_{\min} = S_1 - \frac{\rho_1^2}{2 a_1} e^{-2a_1 T} \dots\dots\dots (78)$$

となる。

ここで、 S_1 で正規化した最小自乗平均誤差 $\frac{\varepsilon(t)^2_{\min}}{S_1}$ を b_1 、 N_1 、 T をそれぞれ可変にし、他の定数を固定した場合についての傾向図をそれぞれ図 I、II、III に示した。

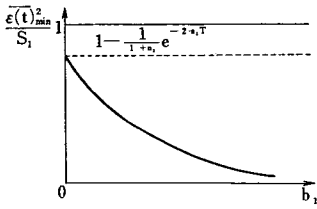


図 I

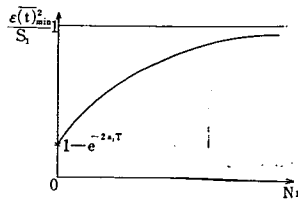


図 II

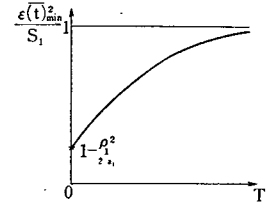


図 III

結 言

信号、雑音がともにエルゴード性をもち互いに統計的に独立な場合、無限メモリーを持つ集中定数系最適予測フィルタが、雑音により振幅変調された入力形に対して、結局 (53) 式の積分方程式の解として得られることを示した。信号、雑音が (54), (55) 式に従う自己相関関数を仮定した場合、最適予測フィルタは伝達関数の形で (69) 式によって得られることを示した。

最後に例題として (71) の仮定のもとでの解を求め、その最小自乗平均誤差の評価を論じた。その結果、カラード・ノイズの統計的性質、いかえれば相関関数に含まれるパラメータ b_1 (b_1 が大きくなればなる程、実は白色雑音に近づくと考えられる), N_1 (ノイズのパワーに相当するものと考えられる), そして予測時間 T に対して、それらを可変にした場合、上述の予測がどの程度まで可能かの理論的めやすがたてられた。

文 献

- (1) 天野正章「非白色雑音による振幅変調形入力に対するウィーナ・フィルタの設計」通信学会インホメーション理論研究会資料 1966.2.22
- (2) 天野正章「ランダム局所入力による非線形フィルタ」通信学会インホメーション理論研究会資料 1966.9.28
- (3) 天野正章「非線型結合入力に対する可変系フィルタシステムについて」明治大学工学部研究報告 No. 22 1967
- (4) 天野正章「 N 乗信号を許す最適非線形ランダムシステムについて」明治大学工学部研究報告 No. 22 1967
- (5) 堀内和夫, 天野正章「非線形的に結合された雑音のろ波(広義)」通信学会誌トランザクション「情報と制御」1963.8
- (6) Laning & Battin "Random Processes in automatic control" (Maple Press Co. York) 1956.
- (7) Merriam III "Optimization Theory and Design of Feedback Control Systems" McGraw-Hill Co. York 1964.